EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tons les candidats
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions: chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.
Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p([0, t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.
Cette loi est telle que $p([0, t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dt$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t > 0$, la valeur exacte de $p([t, +\infty[)$ est :
(*a*) $1 - e^{-\lambda t}$ (*b*) $e^{-\lambda t}$ (*c*) $1 + e^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a : $p([0, t[) = p([t, +\infty[)$ est :
(*a*) $\ln 2$ (*b*) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ (*c*) $\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
La valeur exacte de λ est alors :
(*a*) $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ (*b*) $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ (*c*) $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :
(*a*) $p([1, +\infty[)$ (*b*) $p([3, +\infty[)$ (*c*) $p([2, 3[)$

***Dans la suite de* l'*exercice on prendra* λ = 0,2.**

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :
(*a*) 0,5523 (*b*) 0,5488 (*c*) 0,4512

Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « X= 4 » est :
(*a*) 0,5555 (*b*) 0,8022 (*c*) 0,1607

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(*a*)	(*b*)	(*c*)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. *a*. Vérifier que : $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b. En déduire la nature du triangle ABC.
c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1, circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.

3. *a*. Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.
b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1, puis calculer son affixe.

b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.

On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.

On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point r(C), image du point C par la rotation r ; en déduire que le point r(C) appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

EXERCICE 2 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4\,i$, $z_1 = -1 - 4\,i$, $z_2 = -4 - i$.

1\. *a.* Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

b. Etablir que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.

Vérifier la relation : $\omega - z' = i\,(z - z')$; en déduire la nature du triangle Ω M M' .

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_n A_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4\. *a.* Calculer en fonction de n le rayon r_n, du cercle circonscrit au triangle $\Omega\, A_n A_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

PROBLEME (10 points)
Commun à tous les candidats

Partie A : **Etude d'une fonction *f* et construction de sa courbe**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1\. *a.* On rappelle que: $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe C admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1 + t)$.

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3\. *a.* Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer les asymptotes à la courbe C et la courbe C.

Partie B : Comportements asymptotiques d'une primitive F de *f* sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction F.

2\. *a.* Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$. Calculer $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c. Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

(1) $F(x) = x - \ln(1 + e^{x}) - f(x) + 2\ln 2$.

(2) $F(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^{k})$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. *a*. Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

b. Comparer u_n et $F(n)$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 1 (5 points)

1. Une primitive de $u' \, e^{u}$ est e^{u} ici $u(t) = -\lambda t$ donc $u'(t) = -\lambda$

$\lambda \, e^{-\lambda t} = -u'(t) \, e^{u(t)}$ donc une primitive de $\lambda \, e^{-\lambda t}$ est $-e^{u(t)}$

$p([0, t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$ donc $p([0, t[) = -e^{-\lambda t} + 1$ donc la bonne réponse (*a*).

On pouvait éliminer (*b*) : car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ or la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant *t* (quand *t* tend vers $+\infty$) est égale 1 (il y a une quasi certitude que l'appareil tombe en panne un jour).

On pouvait éliminer (*c*) : une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, or $1 + e^{-\lambda t} > 1$

2. $p([t, +\infty[) = 1 - p([0, t[)$ donc $p([0, t[) = p([t, +\infty[) \Leftrightarrow p([0, t[) = 1 - p([0, t[)$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = \ln \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

donc la bonne réponse (*b*).

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.

$p([0 ; 1[) = 0{,}18$ donc $t = 1$ et $p([0 ; 1[) = 1 - e^{-\lambda \times 1} = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}18$

$p([0 ; 1[) = 0{,}18 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda \times 1} = 0{,}18 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0{,}82 \Leftrightarrow -\lambda = \ln 0{,}82 \Leftrightarrow \lambda = -\ln\left(\dfrac{82}{100}\right) \Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\dfrac{100}{82}\right)$

$\Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ donc la bonne réponse (*a*).

4. On a une loi de durée de vie sans vieillissement donc $p_{[t\,;\,+\infty[}([t+s\,;\,+\infty[) = p([s\,;\,+\infty[)$

Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est égale à la probabilité qu'il tombe en panne après la troisième année donc à $p([3, +\infty[)$.

On pouvait aussi exclure les cas :

La probabilité $p([0, 3[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant 3 donc avant la troisième année.

la probabilité qu'il tombe en panne la troisième année est $p([2 ; 3[)$.

la probabilité qu'il ne tombe pas en panne la troisième année est $p = 1 - p([2 ; 3[) = p([3, +\infty[) + p([0, 2[)$

or l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, donc $p([0, 2[) = 0$

donc $p = p([3, +\infty[)$

donc la bonne réponse (*b*).

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

$p([3, +\infty[) = e^{-\lambda 3} = e^{-0{,}2 \times 3} = 0{,}5488$ donc la bonne réponse (*b*).

On a une succession de 10 expériences aléatoires indépendantes, chacune d'elle a deux issues :

l'appareil n'a pas eu de panne au cours des trois premières années ($p = 0{,}5488$)

l'appareil a eu une panne au cours des trois premières années ($q = 1 - p = 0{,}4512$)

donc la variable aléatoire X égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années, suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,5488)

$p(X = 4) = \dbinom{10}{4} p^4 q^{10-4} = 0{,}1607$ donc la bonne réponse (*c*).

EXERCICE 2 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

2. *a*. $z_B - z_C = -3 - i\sqrt{3} = -\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)$

$z_A - z_C = -3 + i\sqrt{3} = -\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)$ donc $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$

$\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{3 + 2i\sqrt{3} - 1}{3 + 1}$ donc $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ donc $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. $z_B - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C)$

donc B est l'image de A dans la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ donc le triangle ABC est équilatéral direct.

c. Le centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral est aussi le centre de gravité de ce triangle donc le centre de ce cercle a pour affixe : $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$, or $z_A + z_B + z_C = -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} + 2 = 0$ donc le centre du cercle Γ_1 est O.

$R = OA = OB = OC = |z_C| = 2$

3. *a*. $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réels, donc $z + \bar{z} = 2\,x$ et $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$
$2\,(z + \bar{z}) + z\,\bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4\,x = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4$
L'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient : $2\,(z + \bar{z}) + z\,\bar{z} = 0$ est le cercle de centre Ω d'affixe – 2 de rayon 2.

b. $(-1 + 2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$ donc A et B sont éléments de Γ_2.

4. *a*. Le triangle ABC est équilatéral direct donc r_1 (A) = A et r_1(B) = C
z_1 transforme un point d'affixe z en un point d'affixe z' tel que $z' - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,(z - z_A)$
soit $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,z + z_A\,(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})$
$z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z' = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

donc l'affixe z' de l'image C_1 du point C par r_1 : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2 + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ soit $z' = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

b. La rotation r_1 transforme le cercle Γ_2 de rayon 2 de centre Ω d'affixe – 2 en le cercle de même rayon de centre $r_1(\Omega)$
$r_1(\Omega) = \Omega_1$: $z' = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2) + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
$z' = 0$ donc l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1 est le cercle de centre O de rayon 2 soit Γ_1.

5. *a*. La rotation r transforme le cercle Γ_2 de rayon 2 de centre Ω d'affixe – 2 en le cercle Γ_1 de même rayon de centre $r(\Omega)$ = O
$r_1(\Omega) = \mathrm{O} \Leftrightarrow -2\,a + b = 0$

b. r(C) = C' d'affixe $z' = 2\,a + b$ or $-2\,a + b = 0$ donc $z' = 4\,a$
$|\,a\,| = 1$ donc $|\,z'\,| = 4\,|\,a\,| = 4$ or OC' = $|\,z'\,| = 4$ donc C' appartient au cercle Γ de centre O de rayon 4.
C_1 a pour affixe $2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ or $|\,2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}\,| = 4$ donc le cercle Γ passe par C_1.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
1. *a*. $A_0 \neq A_1$ et $A_1 \neq A_2$ donc il existe une similitude directe S unique telle que S $(A_0) = A_1$ et S $(A_1) = A_2$.

b. S est une similitude directe donc l'écriture complexe de S est de la forme $z' = a\,z + b$
S $(A_0) = A_1$ donc $-1 - 4\,\mathrm{i} = a\,(5 - 4\,\mathrm{i}) + b$ et S $(A_1) = A_2$ donc $-4 - \mathrm{i} = a\,(-1 - 4\,\mathrm{i}) + b$
donc par différence membre à membre : $3 - 3\,\mathrm{i} = 6\,a$ donc $a = \frac{1 - i}{2}$
$b = -4 - \mathrm{i} - a\,(-1 - 4\,\mathrm{i}) = -4 - \mathrm{i} + \frac{1 - \mathrm{i}}{2}(1 + 4\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow b = -4 - \mathrm{i} + \frac{1}{2}(1 + 4\,\mathrm{i} - \mathrm{i} + 4) \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(-8 - 2\,\mathrm{i} + 5 + 3\,\mathrm{i}) \Leftrightarrow b = \frac{-3 + \mathrm{i}}{2}$
L'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}\,z + \frac{-3 + \mathrm{i}}{2}$.

c. $|\,a\,| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg a = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ donc le rapport de la similitude est $\frac{\sqrt{2}}{2}$, son angle $-\frac{\pi}{4}$.
ω est solution de l'équation $z = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}\,z + \frac{-3 + \mathrm{i}}{2}$ donc $2\,z = (1 - \mathrm{i}) + (-3 + \mathrm{i})$ soit $z\,(1 + \mathrm{i}) = (-3 + \mathrm{i})$
$2\,z = (-3 + \mathrm{i})\,(1 - \mathrm{i})$ donc $\omega = -1 + 2\,\mathrm{i}$

d. $z' = \frac{1 - i}{2}\,z + \frac{-3 + i}{2}$ soit $(1 + \mathrm{i})\,z' = z - 4 + 2\,\mathrm{i}$ or $(1 + \mathrm{i})\,\omega = \omega - 4 + 2\,\mathrm{i}$
donc $(1 + \mathrm{i})\,(z' - \omega) = z - \omega$; en développant : $(1 + \mathrm{i})\,z' - \mathrm{i}\,\omega = z$
donc $\mathrm{i}\,(z' - \omega) = z - z'$ en multipliant par i puisque $\mathrm{i}^2 = -1$ alors : $\omega - z' = \mathrm{i}\,(z - z')$
donc en égalant les modules ΩM' = ΩM et $\arg\frac{\omega - z'}{z - z'} = \arg \mathrm{i}$ soit $(\overrightarrow{\mathrm{M'M}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{M'\Omega}}) = \frac{\pi}{2}$
le triangle Ω M M' est rectangle en M', isocèle indirect.

2. *a*.

b. S est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $A_{n+1} = S(A_n)$ et $A_{n+2} = S(A_{n+1})$ donc $A_{n+1}A_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_n A_{n+1}$

or $u_n = A_n A_{n+1}$ et $u_{n+1} = A_{n+1} A_{n+2}$ donc $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$, de premier terme $u_0 = A_0 A_1 = |z_1 - z_0| = 6$ donc $u_n = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

3\. *a.* La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de premier terme $u_0 = 6$ donc $v_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} u_0$

$$v_n = 6\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} - 1\right) \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} \Leftrightarrow v_n = 6\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} - 1\right) \times \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)} \Leftrightarrow v_n = -12\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

$$v_n = 6(\sqrt{2}+2)\left(1 - \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\right)$$

b. $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 6(\sqrt{2}+2)$

4\. *a.* Le triangle Ω M M' est rectangle isocèle en M', indirect donc le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}, isocèle indirect.
donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est $[\Omega A_n]$ donc $2r_n = |\omega - a_n|$
or $\omega - z' = i(z - z')$ donc en choisissant $z = a_{n-1}$ alors $z' = a_n$ on obtient $\omega - a_n = i(a_{n-1} - a_n)$

donc $2r_n = |a_{n-1} - a_n| = u_{n-1}$ donc $r_n = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. $r_n < 10^{-2} \Leftrightarrow 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < \frac{10^{-2}}{3}$ donc en prenant les inverses : $r_n < 10^{-2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{n-1} > 300$

$\Leftrightarrow (n-1)\ln\sqrt{2} > \ln 300 \Leftrightarrow n - 1 > \frac{\ln 300}{\ln\sqrt{2}}$ or $\frac{\ln 300}{\ln\sqrt{2}} \approx 16{,}45$ (donc 16 est exclu et 17 accepté)

$r_n < 10^{-2} \Leftrightarrow n - 1 > 16 \Leftrightarrow n > 17$ donc $p = 17$

PROBLEME

Partie A : Etude d'une fonction *f* et construction de sa courbe

1. *a.* $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$ car $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$

Soit $h = e^{x}$, donc $\dfrac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}} = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

b. $\dfrac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = \dfrac{x}{e^{x}} + \dfrac{1}{e^{x}}\ln\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right) = \dfrac{x}{e^{x}} + \dfrac{1}{e^{x}}[\ln(1+e^{x}) - \ln(e^{x})]$

$= \dfrac{x}{e^{x}} + \dfrac{1}{e^{x}}[\ln(1+e^{x}) - x] = \dfrac{1}{e^{x}}\ln(1+e^{x}) = f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln 1 = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = 0$

$\dfrac{x}{e^{x}} = x\,e^{-x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe C admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ donc la courbe C admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $-\infty$.

2. *a.* $g'(t) = \dfrac{1\times(1+t) - 1\times t}{(1+t)^{2}} - \dfrac{1}{1+t}$ donc $g'(t) = \dfrac{1-(1+t)}{(1+t)^{2}}$ soit $g'(t) = -\dfrac{t}{(1+t)^{2}}$

sur $]0\,;+\infty[$ $g'(t) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

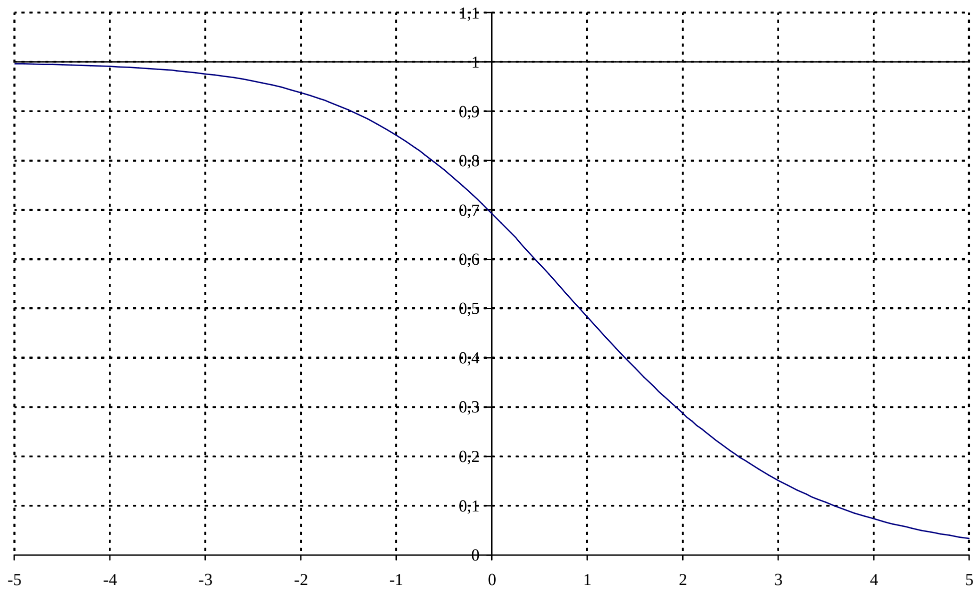
b. $g(0) = 0$ et g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ donc pour tout t de $]0\,;+\infty[$, $g(t) < 0$

3. *a.* $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{x}) + e^{-x}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} \Leftrightarrow f'(x) = e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+e^{x})\right]$ $f'(x) = e^{-x}g(e^{x})$

b. Pour tout x réel $e^{x} > 0$ donc $g(e^{x}) < 0$ de plus $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) < 0$. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	0

4.



Partie B : Comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est la primitive nulle en 0, de f. f est positive sur $\mathbb{R}$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. *a.* $1-\dfrac{e^t}{1+e^t} = \dfrac{(1+e^t)-e^t}{1+e^t} = \dfrac{1}{1+e^t}$.

$\dfrac{e^t}{1+e^t} = \dfrac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = 1 + e^t$ donc une primitive de $1-\dfrac{e^t}{1+e^t}$ est $t - \ln(1+e^t)$

$\int_0^x \dfrac{1}{1+e^t}\,dt = x - \ln(1+e^x) + \ln 2$.

b. $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt$

Soit $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \ln(1+e^t)$

alors $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$

donc $u(t)\,v'(t) = -e^{-t}\dfrac{e^t}{1+e^t} = -\dfrac{1}{1+e^t}$

$F(x) = \left[-e^{-t}\ln(1+e^t)\right]_0^x - \int_0^x \dfrac{-1}{1+e^t}\,dt$

$F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln 2 + (x - \ln(1+e^x) + \ln 2)$

$F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + 2\ln 2$

c. $F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + 2\ln 2$ or $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ donc : $F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$.

$F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + 2\ln 2$ or $x = \ln(e^x)$

$F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + 2\ln 2$

or si $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$F(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) + 2\ln 2$ or $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ donc :

$F(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. $F(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

$F(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) - f(x) + 2\ln 2$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) = 0$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$

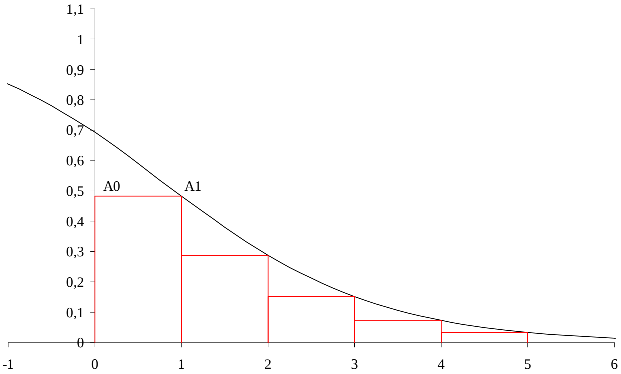
4) $F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$ donc $F(x) - x = -\ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) - x = -1 + 2\ln 2$

donc la droite d'équation $y = x - 1 + 2\ln 2$ est asymptote à la courbe de F en $-\infty$.

Partie C : Etude d'une suite

1.



$f(1)$ correspond à l'aire du rectangle OA_0A_1B où B est le point de l'axe des abscisses d'abscisse 1
L'ordonnée de A_1 est $f(1)$ donc la longueur du rectangle est $f(1)$, la largeur du rectangle est 1 donc son aire est $f(1)$
etc. jusqu'au point B_n de l'axe des abscisses d'abscisse n, u_n est la somme des aires de ces rectangles.
Sur le graphique est représentée u_5 .

2. $u_{n+1} - u_n = f(n+1)$ or f est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f(n+1) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$
La suite u_n est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3. *a.* f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout t de $[k\,;\,k+1]$: $f(k+1) \le f(t) \le f(k)$ donc : $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(k)$

b. si $k = 0$: $f(1) \le \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(0)$

si $k = 1$: $f(2) \le \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(1)$

si $k = 2$: $f(3) \le \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(2)$

…

si $k = n-1$: $f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(n-1)$

En additionnant membre à membre ces inégalités :

$u_n \le \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit $u_n \le \mathrm{F}(n)$

en reprenant :

si $k = 0$: $f(1) \le \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(0)$

si $k = 1$: $f(2) \le \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(1)$

si $k = 2$: $f(3) \le \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t \le f(2)$

…

si $k = n-1$: $f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(n-1)$

si $k = n$: $f(n+1) \le \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le f(n)$

En additionnant membre à membre ces inégalités :

$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le u_n$ donc $\mathrm{F}(n+1) \le u_n$ donc $\mathrm{F}(n+1) \le u_n \le \mathrm{F}(n)$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 2 \ln 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{F}(n) = 2 \ln 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{F}(n+1) = 2 \ln 2$

u_n est compris entre deux termes tendant vers $2 \ln 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 \ln 2$